УДК 519.85

О.О. Ємець, О.О. Черненко
Вищий навчальний заклад Укоопспілки «Полтавський університет
економіки і торгівлі», Україна
36014, м. Полтава, вул. Коваля, 3

Метод гілок та меж для розв'язування цілочислової задачі дробово-лінійної оптимізації

O.A. Emets, O.A. Chernenko
Higher Educational Establishment of Ukoopspilka Poltava University
of Economics and Trade
Ukraine, 36014, Kovalya str., 3

Branch and Bound Method for Solving the Integer Problem of Linear-Fractional Optimization

О.А. Емец, О.А. Черненко
Высшее учебное заведение Укоопобщества «Полтавский университет
экономики и торговки», Украина
Украина, 36014, ул. Коваля, 3

Метод ветвей и границ для решения целочисленной задачи дробно-линейной оптимизации

У статті в рамках загальної схеми методу гілок та меж обґрунтовано алгоритм розв'язання задач цілочислової оптимізації у випадку дробово-лінійної цільової функції та лінійних додаткових обмежень.
Ключові слова: дробово-лінійна функція, метод гілок та меж, цілочислове розв'язання.

Within general pattern for the branch and bound method, the solution algorithm of integer optimization in case of the linear-fractional objective function and additional linear constraints is considered in the article.
Key Words: linear-fractional function, branch and bound method, integer solution.

В статье в рамках общей схемы метода ветвей и границ обоснован алгоритм решения задач целочисленной оптимизации в случае дробно-линейной целевой функции и линейных дополнительных ограничений.
Ключевые слова: дробно-линейная функция, метод ветвей и границ,
целочисленное решение.

Вступ

Вимога дискретності змінних в явній чи неявній формах зустрічається в багатьох практичних задачах оптимізації [1-9]. Так, в економіко-математичних моделях, наприклад, коли необхідно знайти валовий випуск продукції чи кількість поголів'я тварин, змінні мають набувати цілих значень. Крім того, побудова саме адекватної реаліям моделі вимагає поряд з лінійними функціями використовувати дробово-лінійні.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують точні та наближені методи [1-16], серед яких досить поширеними є комбінаторні методи. Відомі методи розв'язання задач дробово-лінійної оптимізації [15], [16], розроблено методи дробово-лінійних задач на комбінаторних множинах [4-6].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Однак авторам не відомі дослідження задач цілочислової оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією. В літературі вони не розглядалися, а тому є доцільним запропонувати постановку таких задач та методи їх розв'язання.

Мета даної статті – поширити метод послідовного аналізу варіантів в рамках схеми методу гілок та меж з використанням на кожному кроці симплекс-методу для оцінки розв'язань цілочислових задач оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією, а також обґрунтувати алгоритм цього методу, використовуючи ідеї Ленда та Дойга [10].

Обґрунтування отриманих наукових результатів

Розглянемо задачу вигляду: знайти впорядковану пару $\left\langle f\left(x^*\right), x^*\right\rangle$, таку, що

$$f(x^*) = \max_{x\in R^n} f(x) = \max_{x\in R^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}, \qquad x^* = \arg\max_{x\in R^n} f(x) \tag{1}$$

за обмежень $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \qquad \forall\ i \in J_m \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \forall j \in J_n; \tag{3}$$

$$x_j \text{ − цілі числа} \quad \forall j \in J_n, \tag{4}$$

де $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, c_j, d_j, a_{ij}, b_i − дійсні сталі $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_n$, J_k позначає множину перших k натуральних чисел $\{1, 2, ..., k\}$.

Для розв'язання (1) − (4) виконаємо наступні перетворення. Спочатку, як і в відомих [15] алгоритмах Гоморі чи Дальтона-Ллевеліна, послабимо (1) − (4), відкинувши умову (4). Застосуємо до задачі (1) − (3) відображення ψ, яке задамо співвідношеннями

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}, \quad y_j = x_j y_0 \ \ \forall j \in J_n, \ \ x \in R^n, \tag{5}$$

де знаменник не обертається в нуль (вважаємо $y_0 > 0$ $\forall x$, що задовольняють (2), (3)) та перейдемо до задачі з лінійною функцією цілі: знайти

$$F(y^*) = \max_{y\in R^{n+1}} F\left(y\right) = \max_{y\in R^{n+1}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0\right), \qquad y^* = \arg\max_{y\in R^{n+1}} F\left(y\right) \tag{6}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} 0, \ \ \forall i \in J_m, \tag{7}$$

$$y_j \ge 0 \quad \forall j \in J_n^0 = J_n \cup \{0\}, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1, \tag{9}$$

де $y = (y_0, y_1, ..., y_k, y_{k+1}, ..., y_n) \in R^{n+1}$.

Зауважимо, що $f(x^*)=F(y^*)$, де $f(x^*)$ визначається з (1) − (4), а $F(y^*)$ – розв'язання задачі (6) – (9).

Задача (6) − (9) є лінійною і може бути розв'язана одним із методів лінійного програмування, наприклад, модифікованим симплекс-методом. На наступних етапах розв'язання необхідно використовувати перетворення, обернене до (5), повертаючись до вихідної задачі та перевіряючи умову (4) для останнього знайденого розв'язання.

Запишемо алгоритм розв'язання задачі (1) – (4), в основі якого лежить загальна схема алгоритму Ленд та Дойг [10]. Позначимо κ – номер ітерації. Під ітерацією будемо розуміти один повний цикл алгоритму.

1. Відкинути умову (4) і застосувати перетворення (5) до (1) – (3), отримаємо (6) – (9).

2. Розв'язати лінійну задачу (6) – (9).

3. Якщо (6) – (9) не має розв'язання, то не має розв'язання (1) – (4), інакше нехай $\overline{x} = \overline{y}\left(y_0\right)^{-1}$ – екстремаль задачі (1) – (3).

4. Якщо $\overline{x} = \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$ задовольняє (4), то $\left\langle f(\overline{x}), \overline{x}\right\rangle$ – розв'язання задачі (1) – (4), інакше перейти на крок 5.

5. Визначити найменший індекс j компоненти x_j' точки $\overline{x}$, такої, що x_j' – не ціла.

6. Записати два обмеження, що в області (2), (3) відтинають $\overline{x}$:

$$x_j \le \left\lfloor x_j' \right\rfloor, \tag{10}$$

$$x_j \ge \left\lfloor x_j' \right\rfloor + 1, \tag{11}$$

де $\left\lfloor x_j' \right\rfloor$ – ціла частина x_j'.

7. Застосувати до (10), (11) перетворення (5):

$$y_j \le \left\lfloor x_j' \right\rfloor y_0, \tag{12}$$

$$y_j \ge \left(\left\lfloor x_j' \right\rfloor + 1\right) y_0. \tag{13}$$

8. Приєднати до останньої задачі вигляду (6) – (9) обмеження (12) та застосувати кроки 2 – 4 до розв'язання (6) – (9), (12). Якщо задача (6) – (9), (12) не має розв'язання, перейти на крок 9, інакше $\left\langle F(\overline{y_1}), \overline{y_1}\right\rangle$ – розв'язання задачі (6) – (9), (12).

9. Приєднати до останньої задачі вигляду (6) – (9) обмеження (13) та застосувати кроки 2 – 4 до розв'язання (6) – (9), (13). Якщо задача (6) – (9), (13) не має розв'язання, перейти на крок 10, інакше $\left\langle F(\overline{y_2}), \overline{y_2}\right\rangle$ – розв'язання задачі (6) –(9), (13).

10. Якщо жодна із задач вигляду (6) – (9), (12) та (6) – (9), (13) розв'язання не має, то задача (1) – (4) теж розв'язання не має у випадку $\kappa = 1$. Для $\kappa > 1$ вибрати для подальшого галуження іншу область з вершиною, знайденою на кроці 12 $(\kappa - 1)$-ї ітерації, і перейти на крок 4.

11. Якщо одна із задач вигляду (6) – (9), (12) чи (6) – (9), (13) розв'язання не має, то перейти на крок 4, вважаючи $\overline{x} = \overline{y_i}\left(y_0\right)^{-1}$, де i – номер точки, що надає цільовій функції найбільшого в області D_i значення.

12. Якщо обидві задачі вигляду (6) – (9), (12) та (6) – (9), (13) мають розв'язання, то для подальшого галуження обрати ту, яка надає цільовій функції більшого значення, і перейти на крок 4, вважаючи $\bar{x} = \bar{y}_i \left(y_0 \right)^{-1}$, де i – номер точки $\bar{y}_i$, що надає цільовій функції більше з двох значень $F\left(\bar{y}_j\right),\ j = 1, 2$. У випадку, коли значення цільових функцій збігаються, перейти на крок 4 і проаналізувати розв'язання кожної із задач.

Обґрунтуємо вищеописаний алгоритм. Опишемо спосіб галуження, відсікання та оцінювання методу гілок та меж (МГМ), виходячи із специфіки розв'язуваної цим методом задачі.

Позначимо D – допустиму область вихідної задачі, тобто множину точок, що задовольняють умовам (1) – (4). Розіб'ємо множину D на частини, що не мають спільних точок, тобто $D = D_1 \cup D^* \cup D_2$, $D_1 \cap D^* \cap D_2 = \varnothing$, де D_1 – множина допустимих розв'язань задачі (1) – (4) при додаванні обмеження (10); D^* – множина допустимих розв'язань задачі (1) – (4) при додаванні обмеження $\left\lfloor x_j' \right\rfloor < x_j < \left\lfloor x_j' \right\rfloor + 1$; D_2 – множина допустимих розв'язань задачі (1) – (4) при додаванні обмеження (11). Очевидно, що множина розв'язань D^* є порожньою для задачі (1) – (4) і з подальшого галуження може бути виключена.

Процес розв'язання можна представити у вигляді дерева, в якому вихідна вершина відповідає плану x_0 – оптимальному плану задачі (1) – (3). А кожна зв'язана вершина з вихідною вершиною відповідає оптимальному плану такої задачі: знайти (1) за обмежень (2), (3) та за додаткового обмеження (10) або (11).

Кожній з таких вершин (множин D_i допустимих розв'язань відповідної задачі) надають оцінку (верхню межу): $\xi\left(D_i\right) = \max\limits_{x \in D_i} f\left(x\right)$. Якщо оптимальні плани отриманих задач задовольняють умови цілочисельності, то план з максимальною оцінкою і буде оптимальним планом вихідної задачі, інакше необхідно продовжити процес розбиття. При цьому кожного разу для подальшого розбиття обирають вершину (відповідно множину D_i) з найбільшою оцінкою, тобто з найбільшим значенням цільової функції. Для ітерацій $\kappa > 1$ у випадку, якщо обрана область D_i не містить точок з цілочисловими координатами, використовуємо для подальшого галуження область з меншою оцінкою, знайденою на попередній ітерації (крок 10 алгоритму).

Розбиваючи в процесі розв'язання множину D на підмножини $D_i,\ \bigcup\limits_{\forall i} D_i = D$, маємо, що оцінка для будь-якої з них не більша за оцінку для вихідної множини D, тобто для всіх D_i має місце нерівність: $\xi\left(D_i\right) \le \xi\left(D\right)$.

Правила відсікання (крок 6 алгоритму) враховують той факт, що відсікаються тільки ті області D_i, які не містять точок, що задовольняють (4).

Враховуючи спосіб галуження та правила відсікання, має місце наступне твердження.

Теорема 1. Алгоритм МГМ, застосований до задачі (1) – (4), знаходить її оптимальне розв'язання.

Застосуємо до системи нерівностей, що описують множини $D_1,\ D^*,\ D_2$, перетворення (5), отримаємо $Q_1,\ Q^*,\ Q_2$. Умова (4) при застосуванні відображення (5) набуде вигляду:

$$y_j = x_j y_0, \tag{14}$$

де x_j – цілі $\forall j \in J_n$, $y_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}$.

Теорема 2. Обмеження (12), (13) не відсікають допустимих розв’язань задачі (6) – (9), (14).

Доведення. Нехай існує $y \in Q^*$, така, що y – розв’язання задачі (6) – (9), (14). Застосовуючи до y перетворення, обернене до (5), отримаємо точку x, $x = y\left(y_0\right)^{-1}$. Оскільки задачі (6) – (9), (14) та (1) – (4) еквівалентні, то x – розв’язання задачі (1) – (4). Враховуючи, що відображення ψ задає взаємно однозначну відповідність між D – множиною точок, що задовольняють (1) – (4) та Q – множиною точок, що задовольняють (6) – (9), (14) [5], маємо $Q^* = \psi\left(D^*\right)$, $D^* = \psi^{-1}\left(Q^*\right)$, а отже, маємо $x \in D^*$. Однак за побудовою множина D^* є порожньою для задачі (1) – (4). Суперечність. Таким чином, множина Q^* не містить розв’язань задачі (6) – (9), (14). Твердження доведено.

Приклад. Оптимізувати функцію $\dfrac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to \max$ за лінійних обмежень $x_1 + 3x_2 \ge 12$, $2x_1 - x_2 \le 9$, $-x_1 + 4x_2 \le 8$ та за умов цілочисельності змінних x_1, x_2.

Розв’язання. 1. Відкинемо умову цілочисельності та застосуємо перетворення (5) до «послабленої» задачі, одержимо: $3y_1 + 2y_2 \to \max$ за обмежень $-y_1 - 3y_2 + 12y_0 \le 0$, $2y_1 - y_2 - 9y_0 \le 0$, $-y_1 + 4y_2 - 8y_0 \le 0$, $y_1 + y_2 = 1$.

2 – 3. Розв’язавши лінійну задачу, одержимо $\overline{y} = \left(\dfrac{7}{54}, \dfrac{13}{18}, \dfrac{5}{18}\right)$, звідки $\overline{x} = \left(\dfrac{39}{7}, \dfrac{15}{7}\right)$.

4. Враховуючи, що x_1 та x_2 – не цілі, переходимо на крок 5.

5. $j = 1$.

6. Записуємо два обмеження, що відтинають $\overline{x}$: $x_1 \le 5$, $x_1 \ge 6$. Застосовуємо до обмежень $x_1 \le 5$, $x_1 \ge 6$ перетворення (5), отримаємо $y_1 - 5y_0 \le 0$, $-y_1 + 6y_0 \le 0$.

7. До лінійної задачі кроку 1 додаємо обмеження $y_1 - 5y_0 \le 0$ і розв’язуємо її. $F(\overline{y_1}) = \dfrac{8}{3}$, $\overline{x_1} = \left(5, \dfrac{5}{2}\right)$.

8. До лінійної задачі кроку 1 додаємо обмеження $-y_1 + 6y_0 \le 0$ і розв’язуємо її. $F(\overline{y_2}) = \dfrac{8}{3}$, $\overline{x_2} = \left(6, 3\right)$.

9. Враховуючи, що $F(\overline{y_1}) = F(\overline{y_2}) = \dfrac{8}{3}$, переходимо на крок 4 алгоритму.

Оскільки $\overline{x_2} = \left(6, 3\right)$ задовольняє умовам цілочисельності, то $\overline{x_2} = \left(6, 3\right)$ і буде оптимальним розв’язанням вихідної задачі. Таким чином, $\left\langle \dfrac{8}{3}, \left(6, 3\right) \right\rangle$ – розв’язання.

Висновки

Таким чином, у статті побудовано алгоритм методу гілок та меж (ідейно близький до підходу Ленд та Дойг) для розв'язання задач оптимізації дробово-лінійної цільової функції з урахуванням умови цілочисельності змінних та лінійних обмежень.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Доцільним видається надалі програмно реалізувати даний алгоритм та провести оцінку його складності, а також числові експерименти для визначення меж практичного застосування алгоритму.

Література

1. Сергиенко И.В. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации / Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Рощин В.А. − К. : Наукова думка, 1980. − 266 с.
2. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. − К. : Наукова думка, 1981. − 288 с.
3. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. − К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
4. Ємець О.О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О.О. Ємець, Л.М. Колєчкіна. – К. : Наукова думка, 2005. – 117 с.
5. Емец О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / О.А. Емец, О.А. Черненко. – К. : Наук. думка, 2011. – 139 с.
6. Емец О.А. Оптимизация на полиперестановках / О.А. Емец, Н.Г. Романова. – К. : Наук. думка, 2010. – 105 с.
7. Емец О.А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О.А. Емец, Т.Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с.
8. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование) / Ковалев М.М. – Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1973. – 368 с.
9. Корбут А.А. Метод ветвей и границ: обзор теории, алгоритмов, программ и приложений / А.А. Корбут, И.Х. Сигал, Ю.Ю. Финкельштейн // Math. Operationsch und Statist., Ser. Optimiz. − 1977. − № 2. − P. 253-280.
10. Land A.H. An autmatic method of solving discrete programming problems / A.H. Land, A.G. Doig // Econometrica. – 1960. – V. 28. – P. 497-520.
11. Корбут А.А. Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. − М. : Наука, 1969. − 368 с.
12. Кофман А. Методы и модели исследования операцій: Целочисленное програмирование / А. Кофман, А. Анри-Лабордер. – М. : Мир, 1977. – 432 с.
13. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Ху Т. – М. : Мир, 1974. – 520 с.
14. Червак Н.К. Конечный алгоритм отсечений для задач целочисленного линейного программирования с нецелочисленной целевой функцией / Н.К. Червак // Укр. мат. журнал. – 1975. – № 1. – С. 134-137.
15. Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование / И.Н. Ляшенко, Е.А. Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор. − К. : Вища школа, 1975. − 372 с.
16. Наконечний С.І. Математичне програмування : [навч. посібник] / С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2005. – 452 с.

Literatura

1. Sergienko I.V. Priblizhennye metody reshenija diskretnyh zadach optimizacii. K.: Naukova dumka. 1980. 266 s.
2. Sergienko I.V. Modeli i metody reshenija na JeVM kombinatornyh zadach optimizacii. K.: Naukova dumka. 1981. 288 s.
3. Stojan Ju.G. Teorija i metody evklidovoi kombinatornoi optymizacii.K.: Instytut systemnyh doslidzhen' osvity. 1993. 188 s.
4. Yemec' O.O. Zadachi kombinatornoi optymizacii z drobovo-linijnymy cil'ovymy funkcijamy. K.: Naukova dumka. 2005. 117 s.

5. Yemec O.A. Optimizacija drobno-linejnyh funkcij na razmeshhenijah. K.: Nauk. dumka. 2011. 139 s.
6. Yemec O.A. Optimizacija na poliperestanovkah. K.: Nauk. dumka. 2010. 105 s.
7. Yemec O.A. Kombinatornaja optimizacija na razmeshhenijah. K.: Nauk. dumka. 2008. 159 s.
8. Kovalev M.M. Diskretnaja optimizacija (celochislennoe programmirovanie).Minsk: Izd-vo Belorus. un-ta. 1973. 368 s.
9. Korbut A.A. Math. Operationsch und Statist., Ser. Optimiz. 1977. № 2. P. 253-280.
10. Land A.H. Econometrica. 1960. V. 28. P. 497-520.
11. Korbut A.A. Diskretnoe programmirovanie. M.: Nauka. 1969. 368 s.
12. Kofman A. Metody i modeli issledovanija operacij: Celochislennoe programirovanie. M.: Mir, 1977. 432 s.
13. Hu T. Celochislennoe programmirovanie i potoki v setjah. M.: Mir, 1974. 520 s.
14. Chervak N.K. Ukr. mat. zhurnal. 1975. № 1. S. 134-137.
15. Ljashenko I.N. Linejnoe i nelinejnoe programmirovanie. K.: Vishha shkola. 1975. 372 s.
16. Nakonechnij S.I. Matematychne programuvannja: Navch. posibnik. K.: KNEU. 2005. 452 s.

O.A. Emets, O.A. Chernenko

Branch and Bound Method for Solving the Integer Problem of Linear-Fractional Optimization

The article considers the problem of optimization of linear-fractional objective function on a polyhedron that is described by the system of linear constraints and with condition of the integer variables. Actuality of this type of problem is motivated by practical needs, in particular, the construction and study of appropriate models to real processes.

The authors propose the method for solving the integer problem of linear-fractional optimization with additional linear constraints. Namely, the method of sequential analysis of variants in the context of the branch and bound method is extended. This article describes the ways of branching, cutting-off and evaluation in the branch and bound method taking into account the specifics of the problem being solved. To evaluate the integer solutions of the optimization problem with a linear-fractional objective function a transition to a linear objective function are performed and the simplex method is used on every step.

The solution algorithm for integer optimization with the linear-fractional objective function is built. The correctness of the algorithm is grounded by the theorem that the proposed algorithm of the branch and bound method applied to the optimization problem with the linear-fractional function with linear constraints and integer variables finds the optimal solution of problem.

The example of solving the problem of this type by the proposed algorithm is given in the article.

Стаття надійшла до редакції 25.01.2012.